ГЛАВА 4 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

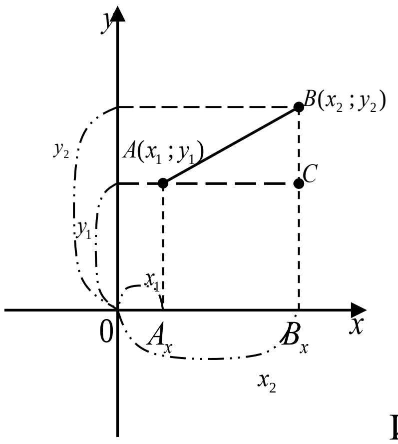
4.1 Понятие уравнения линии. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении

Линия – геометрическое место точек (совокупность точек), обладающих определенным свойством.

Произвольная точка M линии называется ***текущей точкой*** линии, а ее координаты - ***текущими координатами***.

Уравнение, связывающее переменные $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, называется ***уравнением линии***, если ему удовлетворяют координаты любой точки линии и только они.

Пусть в прямоугольной системе координат заданы две точки с координатами $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Найдем расстояние между ними.



Из ΔABC по теореме Пифагора имеем: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$, но $AC = A_xB_x = |x_2 - x_1|$; $CB = A_yB_y = |y_2 - y_1|$.

Подставим в формулу: $AB = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$ или

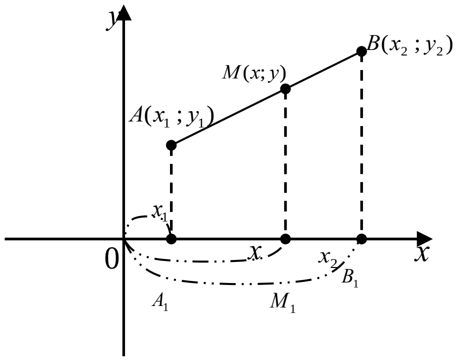
$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Значит, ***расстояние между двумя точками*** равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат.

Пример: Определить расстояние между двумя точками A (2; 3); B (5; -1).

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Пусть даны точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Найти координаты третьей точки *M*, которая делит отрезок *AB* так, что отношение $\dfrac{AM}{MB}$ равно положительному числу λ.



Составим пропорцию: $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{A_1M_1}{M_1B_1}$

Т.к. $\dfrac{AM}{MB}=\lambda$, $A_1M_1=x-x_1$ и $M_1B_1=x_2-x$, то получим:

$$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x} \quad ; \quad x_2\lambda-x\lambda=x-x_1$$

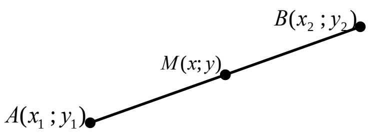
Перегруппируем: $x+x\lambda=x_2\lambda+x_1$; $x(1+\lambda)=x_1+x_2\lambda$.

Отсюда: $\boxed{x=\dfrac{x_1+x_2\lambda}{1+\lambda}}$.

Совершенно аналогично можно получить $\boxed{y=\dfrac{y_1+y_2\lambda}{1+\lambda}}$.

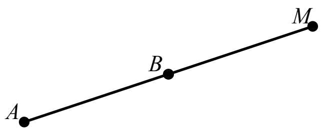
Замечания:

1)



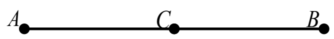
Если $\dfrac{AM}{MB}=\lambda>0$, то точка *M* делит отрезок *AB* внутренним образом.

2)



Если $\dfrac{AM}{MB}=\lambda<0$, то точка *M* делит отрезок *AB* внешним образом.

3)



Пусть делящая точка является серединой отрезка *AB*. Следовательно, $\dfrac{AC}{CB}=1$. Тогда $\boxed{x=\dfrac{x_1+x_2}{2}}$ и $\boxed{y=\dfrac{y_1+y_2}{2}}$, т. е. ***координаты середины отрезка равны полусумме координат концов отрезка.***

Для того чтобы найти ***точки пересечения двух линий***, достаточно совместно решить систему двух уравнений этих линий.

4.2 Прямая линия на плоскости

Прямая линия ℓ задается уравнением первой степени относительно x и y.

$$\ell: \mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C} = 0. \qquad (1)$$

Это <u>общее уравнение</u> прямой ℓ. Здесь коэффициенты A и B есть координаты нормального вектора $\vec{\mathrm{N}} = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ (рис. 1).

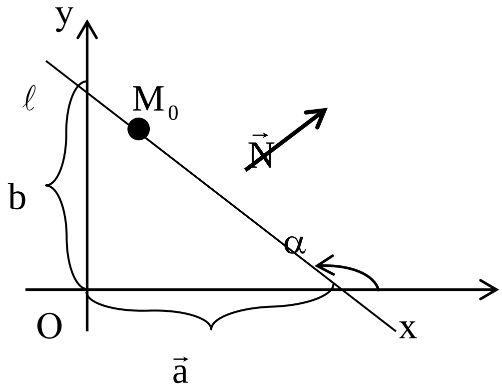


Рис. 1

Существуют другие виды уравнения прямой ℓ. Так, решив уравнения (1) относительно y, получим (если $\mathrm{B} \neq 0$):

$$\ell: \mathrm{y} = \mathrm{kx} + \mathrm{b}, \quad \mathrm{k} = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}, \quad \mathrm{b} = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}.$$

Это ***уравнение прямой с угловым коэффициентом.***

Здесь $\mathrm{k} = \mathrm{tg}\alpha$ - угловой коэффициент прямой, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY (рис. 1). Если $\mathrm{C} \neq 0$, то уравнение (1) можно записать в форме: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Здесь a и b - величины отрезков, которые прямая ℓ отсекает на осях OX и OY (рис. 1).

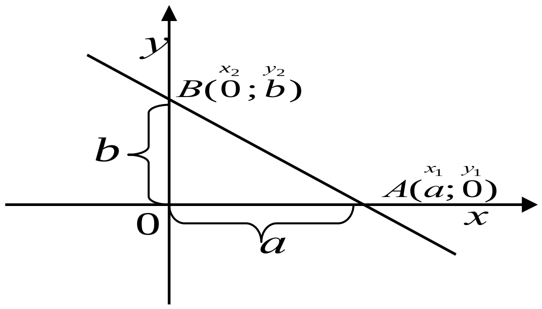
Если ***прямая проходит через две заданные точки*** $\mathrm{M}_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ и $\mathrm{M}_2(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$, то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Пусть нам дана точка $A(x_0; y_0)$ и угловой коэффициент прямой *k*. Возьмем уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$. Так как точка $A \in l$, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению, следовательно, $y_0 = kx_0 + b$. Вычтем из (1)-го уравнения (2)-е, получим:

$$-\begin{array}{l} y = kx + b \\ y_0 = kx_0 + b \end{array} \quad \Rightarrow \quad y - y_0 = k(x - x_0)$$ - ***уравнение пучка прямых***.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки. Подставим в него вместо $(x_1; y_1)$ координаты точки *A*, а вместо $(x_2; y_2)$ координаты точки *B*.



Получим: $\dfrac{y-0}{b-0}=\dfrac{x-a}{0-a}$;

$\dfrac{y}{b}=\dfrac{x-a}{-a}$; $\dfrac{y}{b}=\dfrac{x}{-a}+1$, $\dfrac{y}{b}+\dfrac{x}{a}=1$.

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ - ***уравнение прямой в отрезках на осях,***

где a и b – отрезки, отсекаемые прямой на осях OX и OY.

Если у двух пересекающихся прямых l_1 и l_2 известны угловые коэффициенты k_1 и k_2, то можно найти угол между двумя прямыми:

$\mathrm{tg}\,\alpha_1=k_1$; $\mathrm{tg}\,\alpha_2=k_2$; $\alpha=\alpha_2-\alpha_1$ $\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{tg}(\alpha_2-\alpha_1)$, а по формуле тангенса разности имеем:

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_2-\mathrm{tg}\,\alpha_1}{1+\mathrm{tg}\,\alpha_2\cdot\mathrm{tg}\,\alpha_1}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

или

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|.$$

<u>**Частные случаи:**</u>

1) Пусть $l_1 || l_2$, тогда угол между ними равен нулю $(\alpha=0)$. Тогда:

$$\mathrm{tg}\,\alpha=0 \quad ; \quad \frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k_2-k_1=0 \quad ; \quad \boxed{k_1=k_2}$$

т.е., если угловые коэффициенты равны, то прямые параллельны.

2) Пусть $l_1 \perp l_2$, тогда α = 90˚, а тангенс 90˚ - не существует. Следовательно,

$$\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\text{не существует} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+k_1\cdot k_2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_2=-\frac{1}{k_1}} \quad ,$$

т.е. если угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, то прямые перпендикулярны.

3) Возможны следующие расположения прямых $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ и

$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

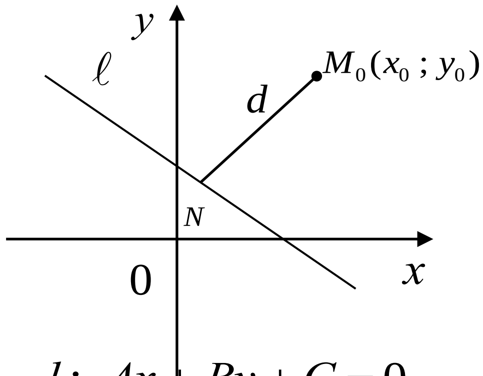
а) если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, то прямые пересекаются;

б) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые параллельны;

в) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

4.3 Расстояние от точки до прямой

Под расстоянием от точки M_0 до прямой l понимают длину перпендикуляра $M_0N = d$, опущенного из точки M на прямую l.



$M_0 \notin l$; $l:\ Ax + By + C = 0$, тогда:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Решение типовых примеров

Задача 1. Написать уравнение прямой ℓ, проходящей через точки $M_1(-1;4)$ и $M_2(5;2)$. Найти угловой коэффициент прямой ℓ и отрезки, которые она отсекает на осях координат.

Решение.

$\dfrac{x+1}{5+1} = \dfrac{y-4}{2-4}$, $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-4}{-2}$, $-2x - 2 = 6y - 24$, $x + 3y - 11 = 0$ - общее уравнение прямой. Отсюда следует, что $3y = -x + 11$ или $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{11}{3}$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом. Здесь $k = -\dfrac{1}{3}$. Из уравнения $x + 3y - 11 = 0 \Rightarrow x + 3y = 11$, $\dfrac{x}{11} + \dfrac{3y}{11} = 1$, $\dfrac{x}{11} + \dfrac{y}{11/3} = 1$. Итак, a=11, b=$\dfrac{11}{3}$.

Задача 2. Найти угол между прямыми $\ell_1: x+2y+6=0$ и $\ell_2: 3x+y-2=0$.

Решение. Так как $\ell_1: y=-1/2x-3,$ то $k_1=-1/2$. Аналогично, $\ell_1: y=-3x+2,$ то $k_2=-3.$

Тогда

$$\mathrm{tg}\Theta=\frac{-3+1/2}{1+(-3)\cdot(-1/2)}=-1,\quad \Theta=135^0.$$

Задача 3. Совпадают, параллельны или пересекаются следующие прямые:

а) $l_1: 2x+y-1=0$ и $l_2: x+5y+5=0$;

б) $l_1: -x+6y+2=0$ и $l_2: x-6y-2=0$;

в) $l_1: 3x+6y+7=0$ и $l_2: x+2y+14=0$.

Решение. Найдем соотношение соответствующих коэффициентов прямых:

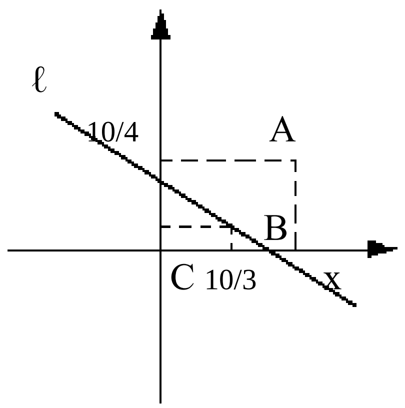
а) $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{5}$, следовательно, прямые пересекаются;

б) $\frac{-1}{1}=\frac{6}{-6}=\frac{2}{-2}$, следовательно, прямые совпадают;

в) $\frac{3}{1}=\frac{6}{2}\neq\frac{7}{14}$, следовательно, прямые параллельны.

Задача 4. Найти расстояние от точек A(4;3), B(2;1) и C(1;0) до прямой *3x+4y-10=0* . Построить точки и прямую.

Решение. A=3, B=4, C=-10



$$d_A = \frac{|3\cdot 4 + 4\cdot 3 - 10|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|12+12-10|}{5} = \frac{14}{5}$$

$$d_B = \frac{|3\cdot 2 + 4\cdot 1 - 10|}{5} = 0$$

$$d_C = \frac{|3\cdot 1 + 4\cdot 0 - 10|}{5} = \frac{7}{5}$$

Уравнение данной прямой в отрезках $\ell: \quad \frac{x}{\frac{10}{3}} + \frac{y}{\frac{10}{4}} = 1$

Задача 5. Даны координаты вершин треугольника $A(2, 5)$, $B(5, 1)$, $C(11, 3)$.

1) Вычислить длину стороны BC.

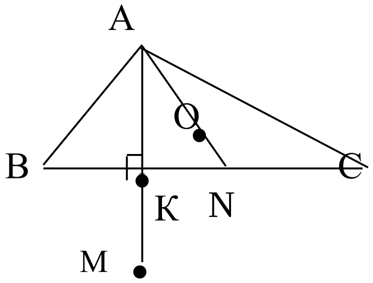
2) Составить уравнения сторон AB и BC.

3) Найти точку пересечения медиан.

4) Найти тангенс угла B.

5) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A, и найти ее длину.

6)Найти координаты точки M, расположенной симметрично точке A, относительно прямой BC.



Решение.

1) Длину стороны BC определим как расстояние между двумя точками: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$, тогда $|BC| = \sqrt{(11-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

2) Уравнение прямой BC: $\frac{x - x_в}{x_с - x_в} = \frac{y - y_в}{y_с - y_в}$; $\frac{x-5}{6} = \frac{y-1}{2}$; $x - 3y - 2 = 0$

.

Уравнение прямой AB: $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$; $\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{-4}$; $4x + 3y - 23 = 0$.

3) Найдем координаты точки N – середины стороны BC:

$$x_N = \frac{x_в + x_с}{2} = \frac{5+11}{2} = 8;\ y_N = \frac{y_в + y_с}{2} = \frac{1+3}{2} = 2;\ N(8,2).$$

Точка пересечения медиан O делит каждую медиану на отрезки в отношении $\lambda = 2:1$.

Используем формулы деления отрезка в данном отношении λ:

$$x_0 = \frac{x_A + \lambda x_N}{1+\lambda}; \; y_0 = \frac{y_A + \lambda y_N}{1+\lambda};$$

$$x_0 = \frac{2+2\cdot 8}{3} = 6; \; y_0 = \frac{5+2\cdot 2}{3} = \frac{9}{3} = 3; \; O(6,\ 3).$$

4) Тангенс угла при вершине B найдем по формуле $tg\angle B = \dfrac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB}\cdot k_{BC}}$.

Уравнение прямой BC: $x - 3y - 2 = 0$, тогда $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$, $k_{BC} = \dfrac{1}{3}$.

Уравнение прямой AB: $4x + 3y - 23 = 0$, тогда $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{23}{3}$, $k_{AB} = -\dfrac{4}{3}$.

$$tg\angle B = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{1}{3}}{1 + (-\frac{4}{3})\cdot\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}} = -\frac{9}{3} = -3.$$

5) Уравнение высоты AK запишем как уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,5)$ перпендикулярно прямой BC. Так как $AK \perp BC$, то

$$k_{AK} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3.$$

Тогда уравнение AK найдем по формуле: $y - y_A = k_{AK}(x - x_A)$.

$y - 5 = -3(x-2)$, $y + 3x - 11 = 0$.

Длину высоты AK можно найти как расстояние от точки A до прямой BC: $|AK| = d = \dfrac{|1\cdot 2 - 3\cdot 5 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \dfrac{15}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

6) Точка M, симметричная точке A относительно прямой BC, расположена на прямой AK, перпендикулярной к прямой BC, на таком же расстоянии от прямой, как и точка A. Координаты точки K найдем как решение системы $\begin{cases} x - 3y - 2 = 0, \\ 3x + y - 11 = 0. \end{cases}$ Систему решим по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10; \; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 35; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}; \; y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2};$$ следовательно, $K\left(\dfrac{7}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Точка K является серединой отрезка AM.

$x_K = \dfrac{x_A + x_M}{2}$; $\dfrac{7}{2} = \dfrac{2 + x_M}{2}$; $x_M = 5$; $y_K = \dfrac{y_A + y_M}{2}$; $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5 + y_M}{2}$; $y_M = -4$; $M(5, -4)$.

Задания для самостоятельного решения

1. Прямая ℓ проходит через точки $M_1(5;7)$ и $M_2(-3;12)$. Написать уравнение прямой ℓ. Найти угловой коэффициент и отрезки, которые она отсекает на осях координат.

2. Даны две прямые $\ell_1: 5x - 7y - 1 = 0$ и $\ell_2: y - 2x = 10$. Найти угол между этими прямыми.

3. Определить взаимное расположение прямых:

а) $l_1: 6x + 2y - 7 = 0$ и $l_2: 3x + y - 3{,}5 = 0$;

б) $l_1: x + y + 12 = 0$ и $l_2: x - y + 3 = 0$;

в) $l_1: -5x + 2y + 7 = 0$ и $l_2: 5x - 2y + 7 = 0$.

4. Найти расстояние от точек A(2;-6), B(5;1) и C(0;3) до прямой $-5x + 2y + 7 = 0$.

5. Даны координаты вершин треугольника $A(1;\,4)$, $B(-3;0)$, $C(5;9)$.

1) Вычислить длину стороны BC.

2) Составить уравнения сторон AB и BC.

3) Найти точку пересечения медиан.

4) Найти тангенс угла B.

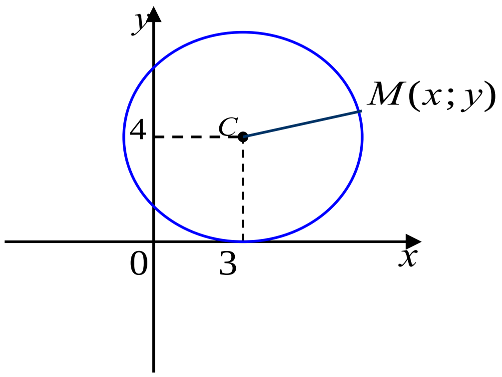
5) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A, и найти ее длину.

6) Найти координаты точки M, расположенной симметрично точке A, относительно прямой BC.

4.4 Кривые второго порядка

Линии, описывающиеся уравнениями второй степени относительно x и y, называются кривыми второго порядка. К ним относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность.



Уравнение окружности с центром в точке *C (a; b)* и радиусом *R* имеет вид:

$$\left(x-a\right)^2+(y-b)^2=R^2$$ - ***нормальное уравнение окружности.***

Если центр окружности находится в начале координат, то $a=b=0$ и уравнение примет вид:

$$x^2+y^2=R^2$$ - ***каноническое уравнение окружности***

Эллипс.

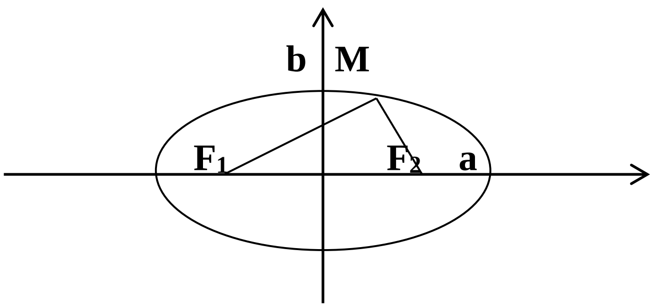
Множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная *2a*, называется *эллипсом.*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ - ***каноническое уравнение эллипса,***

где a – большая полуось;

b – малая полуось.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$ - ***нормальное уравнение эллипса.***



F_1, F_2 – фокусы. F_1 = (c; 0); F_2(-c; 0)

c – половина расстояния между фокусами;

Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$. Т.к. $c < a$, то $\varepsilon < 1$.

Гипербола.

Множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний, которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная равная *2a*, называется ***гиперболой***.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ - ***каноническое уравнение гиперболы,***

где *a* – действительная полуось;

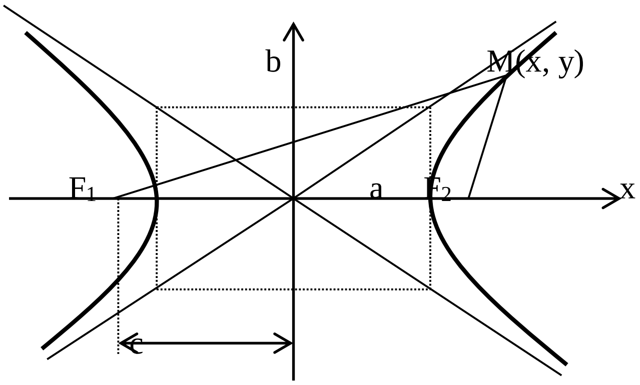
b - мнимая полуось.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$ - ***нормальное уравнение гиперболы,***

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$ - ***уравнение асимптот гиперболы.***

F_1, F_2 – фокусы гиперболы.

$F_1F_2 = 2c$. $c^2 = a^2 + b^2$

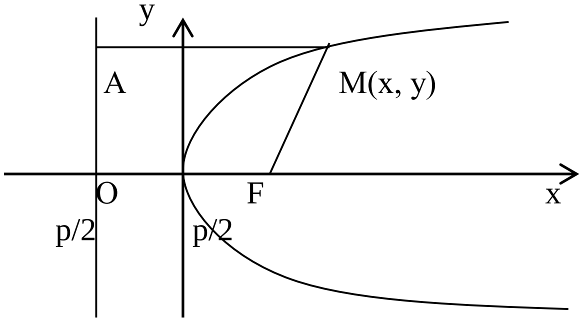


Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где с – половина расстояния между фокусами, а – действительная полуось.

Парабола.

Множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой фокусом, и одной прямой, называемой директрисой, называется ***параболой***.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой**.**



$y^2 = 2px$ - ***каноническое уравнение параболы***

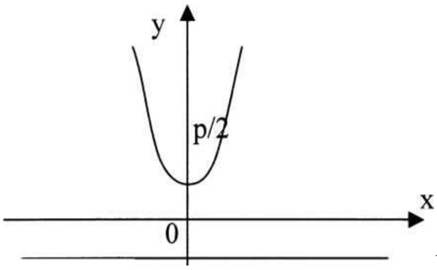
$(y-b)^2 = 2p(x-a)$ - ***уравнение параболы со смещенной вершиной (нормальное уравнение параболы)***

Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы.

Уравнение директрисы: x = -p/2.

Фокус параболы $F(\frac{p}{2};0)$.

$x^2 = 2py$ - парабола, симметричная относительно оси ОУ.



$y = -\frac{p}{2}$ - директриса

Эксцентриситет параболы считается равным 1.